



**Autore: Francesco Marino**

<http://www.francescomarino.net>

[info@francescomarino.net](mailto:info@francescomarino.net)

## Esercitazione n. 5

### Verifica della validità del teorema di Fourier e misura dell'ampiezza delle prime tre componenti armoniche dell'onda quadra

Classe:

Gruppo:

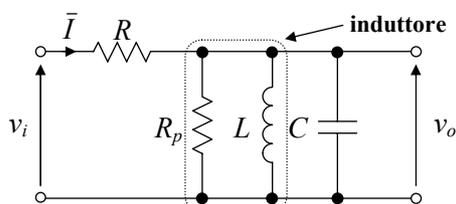
Data	Alumni assenti

### Schema dell'esercitazione

1. Realizzazione di un filtro RCL parallelo passa-banda
2. Misura della frequenza di risonanza e del guadagno in risonanza del filtro
3. Calcolo dei valori teorici delle ampiezza delle armoniche dell'onda quadra
4. Misura dell'ampiezza dell'armonica fondamentale dell'onda quadra
5. Misura dell'ampiezza della terza armonica dell'onda quadra
6. Misura dell'ampiezza della quinta armonica dell'onda quadra
7. Eventuale misura dell'ampiezza delle armoniche di ordine superiore

Teoria: Vol. 1, par. 3.3.2 e 3.3.4

### Circuito



### Formule

#### Teorema di Fourier

$$v(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) = A_0 + A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_2) + \dots$$

$\omega_0$ : pulsazione del segnale  $v(t)$ , pari a  $2\pi f_0$

$A_0$ : componente continua (valor medio)

$A_n$ : ampiezza della  $n$ -sima armonica

$\varphi_n$ : fase iniziale della  $n$ -sima armonica

#### Sviluppo in serie di Fourier dell'onda quadra

$$v(t) = A_0 + \frac{2V_{pp}}{\pi} \sin(\omega_0 t) + \frac{2V_{pp}}{3\pi} \sin(3\omega_0 t) + \frac{2V_{pp}}{5\pi} \sin(5\omega_0 t) + \dots$$

$\omega_0$ : pulsazione del segnale  $v(t)$ , pari a  $2\pi f_0$

$A_0$ : componente continua (valor medio)

$V_{pp}$ : ampiezza picco-picco dell'onda quadra

## Dotazione necessaria

1. Generatore di funzioni (g.d.f.)
2. Oscilloscopio a doppia traccia
3. Tre cavi BNC-coccodrillo (oppure due cavi BNC-coccodrillo, un cavo BNC-BNC e una «T» BNC)
4. Resistore da 39 k $\Omega$
5. Condensatore da 10 nF
6. Induttore da 90  $\mu$ H

## Premessa

L'esercitazione si propone la verifica della validità del teorema di Fourier e la misura dell'ampiezza delle prime tre componenti non nulle dell'onda quadra (componenti 1 - 3 - 5), mediante un filtro RCL parallelo passa-banda, che potrebbe essere il medesimo studiato nell'esercitazione n. 4. Ponendo un'onda quadra in ingresso del detto filtro, avente una risposta in regime sinusoidale del tipo a campana, in uscita del filtro si ottiene un segnale che corrisponde alla somma delle componenti che rientrano all'interno della campana, avendo il filtro eliminato tutte le altre. In particolare, se il filtro è sufficientemente selettivo ( $Q \geq 10$ ), è possibile fare in modo che un'unica componente attraversi il filtro e che tutte le altre siano eliminate: in questo caso il segnale a valle del filtro è di tipo sinusoidale, a riprova della validità del teorema di Fourier e dei principi dell'analisi armonica. Per esempio, facendo coincidere la frequenza  $f_0$  dell'onda quadra con la frequenza di risonanza  $f_{ris}$  del filtro (fig. 1a), la componente fondamentale è l'unica componente armonica del segnale che attraversa il filtro, e pertanto il segnale a valle del filtro è sinusoidale, alla stessa frequenza dell'onda quadra e in fase con essa, dato che il filtro in risonanza non introduce sfasamento (fig. 1b).

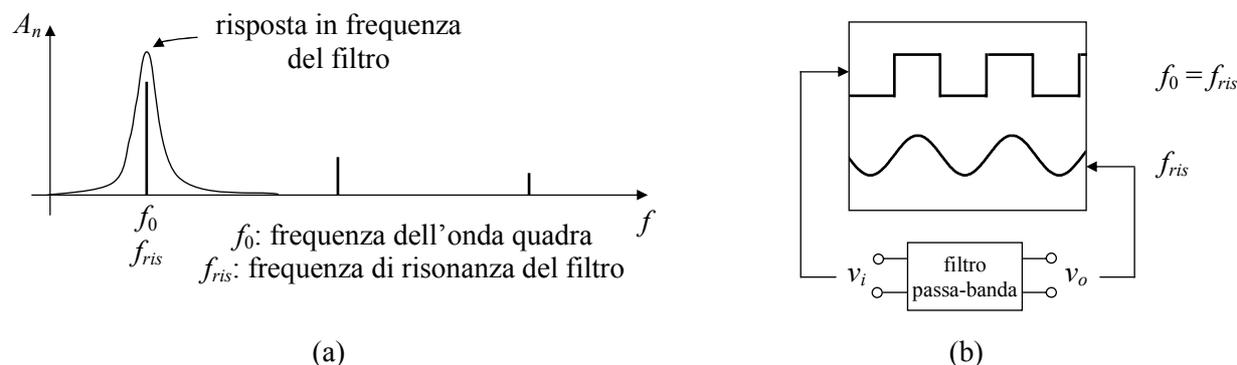


Fig. 1

Conoscendo il guadagno del filtro alla frequenza di risonanza  $G_{ris}$ , è possibile misurare l'ampiezza  $A_1$  dell'armonica fondamentale dell'onda quadra. Poiché infatti quest'ultima è attenuata dal filtro di un fattore  $G_{ris}$ , deve valere la relazione

$$[1] \quad A_{1o} = A_1 \cdot G_{ris}$$

dove  $A_{1o}$  è l'ampiezza del segnale di uscita del filtro. Tenendo conto che  $A_{1o}$  è pari alla metà dell'ampiezza picco-picco del segnale di uscita  $A_{1opp}$ , dalla [1] si ricava

$$[2] \quad A_1 = \frac{A_{1o}}{G_{ris}} = \frac{A_{1opp}}{2G_{ris}}$$

In teoria, detta  $f_0$  la frequenza dell'onda quadra in esame, per misurare le ampiezze della terza e quinta armonica del segnale sarebbe necessario predisporre due filtri passa-banda con frequenza di risonanza pari rispettivamente a  $3f_0$  e  $5f_0$ . L'esperienza si può disporre senza molte difficoltà, ridimensionando la ca-

pacità per ottenere le opportune frequenze di risonanza. Detta  $C_1$  la capacità utilizzata nel primo filtro (da cui deriva la frequenza di risonanza  $f_{ris}$ ), imponendo che la frequenza di risonanza del filtro per la terza armonica sia pari a  $3f_{ris}$  si ottiene

$$[3] \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_3}} = 3 \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}$$

da cui

$$[4] \quad \frac{1}{\sqrt{C_3}} = \frac{3}{\sqrt{C_1}} \quad \sqrt{C_3} = \frac{\sqrt{C_1}}{3} \quad C_3 = \frac{C_1}{9}$$

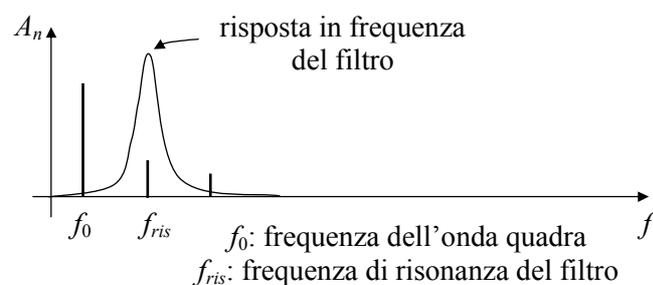
Analogamente per il filtro relativo alla misura della quinta armonica si deve avere

$$[5] \quad C_5 = \frac{C_1}{25}$$

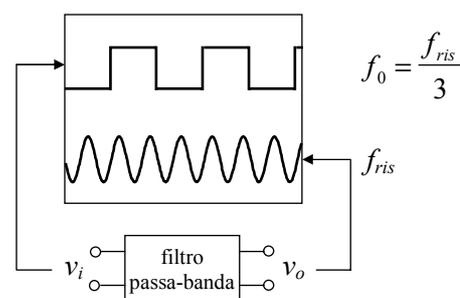
E' possibile anche inviare il segnale ad onda quadra ai tre filtri realizzati, visualizzando contemporaneamente su due oscilloscopi a doppia traccia i quattro segnali relativi all'onda quadra e alle tre armoniche in uscita dai rispettivi filtri (in realtà sarebbe opportuno disaccoppiare i filtri facendoli precedere da tre inseguitori, ma anche collegando i filtri direttamente al segnale si ottiene un risultato soddisfacente).

Al fine di visualizzare la terza e la quinta armonica dell'onda quadra, è possibile in realtà, per semplificare l'esercitazione, utilizzare il medesimo filtro impiegato per la visualizzazione della componente fondamentale. Invece di aumentare la frequenza di risonanza del filtro, come descritto precedentemente, in questo caso si deve diminuire la frequenza dell'onda quadra, facendo in modo che la componente desiderata vada a cadere nella zona di risonanza del filtro. Per esempio, per visualizzare la terza armonica del segnale di ingresso, si deve diminuire la frequenza  $f_0$  di quest'ultimo di un fattore 3 rispetto alla frequenza di risonanza  $f_{ris}$  del filtro; così facendo la terza armonica dell'onda quadra, di frequenza pari a  $3f_0$ , cade nella campana del filtro mentre le altre componenti sono eliminate (fig. 2a). Pertanto il segnale di uscita del filtro è una sinusoide a frequenza tripla del segnale di ingresso (fig. 2b). Analogamente, per visualizzare la quinta armonica si deve diminuire ulteriormente la frequenza del segnale di ingresso facendo in modo che essa sia pari a un quinto della frequenza di risonanza del filtro. Continuando a diminuire la frequenza dell'onda quadra, è possibile visualizzare armoniche di ordine superiore a 5, anche se, ravvicinandosi sempre più le righe dello spettro del segnale di ingresso, il segnale di uscita è sempre meno puro perché l'azione filtrante del circuito RCL diminuisce progressivamente (tale effetto è visibile in realtà anche per le armoniche 3 e 5, a meno di non aver predisposto un filtro altamente selettivo). Per la misura dell'ampiezza delle componenti armoniche si applicano relazioni analoghe alla [2]:

$$[6] \quad A_3 = \frac{A_{3opp}}{2G_{ris}} \quad A_5 = \frac{A_{5opp}}{2G_{ris}}$$



(a)



(b)

Fig. 2

## Svolgimento

1) Realizzare un filtro RCL parallelo con i seguenti componenti:  $R = 39 \text{ k}\Omega$ ;  $C = 10 \text{ nF}$ ;  $L = 90 \text{ }\mu\text{H}$ . Montare su breadboard il filtro e realizzare i collegamenti con il g.d.f. e l'oscilloscopio. Collegare il g.d.f. all'ingresso del filtro e i canali 1 e 2 dell'oscilloscopio rispettivamente all'ingresso e all'uscita del filtro. Per quanto riguarda la disposizione delle masse si rimanda all'esercitazione n. 2. Disegnare lo schema completo di g.d.f. e oscilloscopio (rappresentare i cavi mediante una linea bipolare); per quanto riguarda la rappresentazione di g.d.f. e oscilloscopio si rimanda all'esercitazione n. 2.

Schema circuitale

2) Regolare la frequenza del segnale di ingresso sul valore presunto della frequenza di risonanza (calcolato con i valori nominali di  $C$  e  $L$ ). Variando la frequenza del g.d.f. fissare quest'ultima sul valore per il quale il segnale di uscita è massimo (filtro in risonanza). Misurare la frequenza di lavoro (cioè la frequenza di risonanza  $f_{ris}$  del filtro) e il guadagno  $G_{ris}$  del filtro.

$$f_{ris} =$$

$$G_{ris} =$$

3) Calcolare i valori teorici delle ampiezze delle prime cinque componenti armoniche non nulle (componenti 1 - 3 - 5 - 7 - 9) di un'onda quadra di ampiezza picco-picco  $V_{pp} = 1 \text{ V}$ , approssimando i risultati a tre cifre significative.

$$A_{1T} =$$

$$A_{3T} =$$

$$A_{5T} =$$

$$A_{7T} =$$

$$A_{9T} =$$

4) Applicare all'ingresso del filtro un'onda quadra alla frequenza di risonanza del filtro stesso, ottenendo un segnale di uscita sinusoidale avente la stessa frequenza dell'onda quadra (prima armonica). Variando la frequenza del g.d.f. fissare quest'ultima sul valore per il quale il segnale di uscita è massimo (frequenza dell'onda quadra esattamente uguale alla frequenza di risonanza del filtro). Misurare l'ampiezza della prima armonica dell'onda quadra.

*Descrizione del segnale di ingresso:*

Tipo di segnale: Ampiezza picco-picco  $V_{pp} =$  Frequenza  $f_0 =$

*Descrizione del segnale di uscita:*

Tipo di segnale: Ampiezza picco-picco  $A_{1opp} =$  Frequenza  $f_{ris} =$

Ampiezza sperimentale della prima armonica:  $A_{1S} =$

5) Diminuire la frequenza dell'onda quadra sino a che, quando quest'ultima è pari a un terzo della frequenza di risonanza del filtro, non si nota un nuovo picco nell'ampiezza del segnale di uscita. Verificare che la sinusoide presente all'uscita del filtro ha una frequenza tre volte maggiore di quella dell'onda quadra (terza armonica) ed è in fase rispetto a quest'ultima. Misurare l'ampiezza della terza armonica dell'onda quadra.

*Descrizione del segnale di ingresso:*

Tipo di segnale: Ampiezza picco-picco  $V_{pp} =$  Frequenza  $f_0 =$

*Descrizione del segnale di uscita:*

Tipo di segnale: Ampiezza picco-picco  $A_{3opp} =$  Frequenza  $f_{ris} =$

Ampiezza sperimentale della terza armonica:  $A_{3S} =$

6) Diminuire ulteriormente la frequenza dell'onda quadra sino a che, quando quest'ultima è pari a un quinto della frequenza di risonanza del filtro, non si nota un nuovo picco nell'ampiezza del segnale di uscita. Verificare che la sinusoide presente all'uscita del filtro ha una frequenza cinque volte maggiore di quella dell'onda quadra (quinta armonica) ed è in fase rispetto a quest'ultima. Misurare l'ampiezza della quinta armonica dell'onda quadra.

*Descrizione del segnale di ingresso:*

Tipo di segnale: Ampiezza picco-picco  $V_{pp} =$  Frequenza  $f_0 =$

*Descrizione del segnale di uscita:*

Tipo di segnale: Ampiezza picco-picco  $A_{5opp} =$  Frequenza  $f_{ris} =$

Ampiezza sperimentale della terza armonica:  $A_{5S} =$

7) Se possibile (dipende dalla selettività del filtro), ripetere il procedimento dei punti 5 e 6 al fine di misurare l'ampiezza di ulteriori armoniche dell'onda quadra.