



Autore: Francesco Marino
<http://www.francescomarino.net>
info@francescomarino.net

Integrazione al Vol. 1, UD 6
Teoria dei quadripoli lineari

UD6.1i Quadripoli lineari e loro modelli

6.1i.1 Generalità

Nella trattazione che segue identificheremo il generico quadripolo lineare mediante una «scatola nera» dotata di morsetti di ingresso e di uscita (fig. 6.1i.1), disinteressandoci della disposizione circuitale interna, in modo da ottenere risultati validi per la totalità dei quadripoli lineari. Si noti che tensioni e correnti saranno rappresentati in notazione complessa, e ciò sottintende lo studio dei quadripoli in regime sinusoidale.

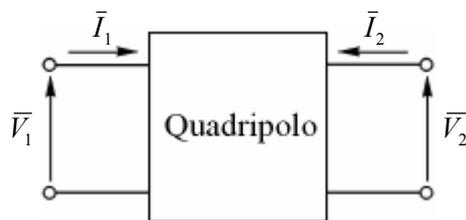


Fig. 6.1i.1
 Generico quadripolo. Si notino i versi di riferimento delle grandezze elettriche.

Naturalmente esiste la possibilità che due quadripoli, diversi nella disposizione circuitale interna, si comportino in modo identico relativamente alle grandezze elettriche ai morsetti; quando questo si verifica i due quadripoli sono detti *equivalenti* e possono essere scambiati tra loro senza influenzare il comportamento della rete elettrica nella quale sono inseriti.

Un quadripolo lineare non può comprendere nella sua rete generatori indipendenti (*f.e.m.* o corrente erogata non dipendente da altre grandezze elettriche del circuito): la presenza di uno di questi dispositivi invaliderebbe il principio di sovrapposizione degli effetti (*vedi* esempio 3.2). Possono però essere presenti generatori dipendenti da una grandezza elettrica ai morsetti o interna, grazie ai quali la potenza in uscita del quadripolo può essere maggiore di quella in ingresso; in questo caso il quadripolo viene detto *attivo*. Quando invece nel quadripolo sono presenti solo elementi *RCL*, o trasformatori (i quali possono innalzare il livello di tensione o di corrente ma non quello di potenza), il quadripolo è detto *passivo*.

Si consideri ora un quadripolo chiuso su una impedenza \bar{Z} variabile, e avente in ingresso una tensione \bar{V}_1 erogata da un generatore ideale che permetta di regolarne il valore (fig. 6.1i.2). Si immagini ora di impostare un valore di \bar{V}_1 e di agire su \bar{Z} in modo tale da ottenere una certa corrente \bar{I}_1 ; \bar{V}_2 e \bar{I}_2 assumeranno determinati valori, che non possono essere cambiati se non variando i valori di \bar{V}_1 e \bar{I}_1 impostati. Alternativamente si potrebbe pensare di prefissare i valori di \bar{V}_1 e \bar{I}_2 , o di \bar{V}_1 e \bar{V}_2 , «lasciando decidere al circuito» i valori delle rimanenti grandezze.

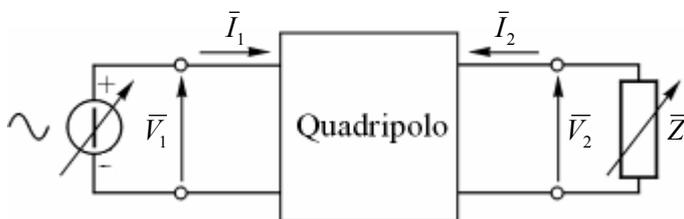


Fig. 6.1i.2
 Regolazione di due grandezze elettriche ai morsetti del quadripolo.

Generalizzando, si può concludere che configurando la rete esterna al quadripolo in modo tale da assegnare certi valori ad una coppia di grandezze elettriche scelte tra \bar{V}_1 , \bar{I}_1 , \bar{V}_2 e \bar{I}_2 , le rimanenti grandezze risultano determinate dal circuito formato. Questo significa che, prese due grandezze elettriche come variabili indipendenti, devono esistere delle equazioni matematiche che determinano il valore delle rimanenti due. Ognuna delle differenti scelte delle due variabili indipendenti conduce ad una descrizione matematica diversa, e poiché le possibilità sono sei ($\bar{V}_1 - \bar{I}_1$, $\bar{V}_1 - \bar{I}_2$, ecc.), esistono sei diversi modelli matematici di un quadripolo lineare; tra questi saranno più estesamente analizzati i modelli a parametri z e y , largamente utilizzati nello studio dei filtri, mentre i rimanenti saranno oggetto di una trattazione più sintetica.

6.1i.2 Modello a parametri z

Scegliendo come variabili indipendenti le correnti di ingresso e di uscita \bar{I}_1 e \bar{I}_2 , le tensioni di ingresso e di uscita \bar{V}_1 e \bar{V}_2 devono essere legate alle due correnti tramite equazioni lineari, tali cioè da rendere valido il principio di sovrapposizione degli effetti. Pertanto le equazioni che descrivono il comportamento del quadripolo hanno la forma

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= \bar{z}_{11}\bar{I}_1 + \bar{z}_{12}\bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 &= \bar{z}_{21}\bar{I}_1 + \bar{z}_{22}\bar{I}_2\end{aligned}\quad [1]$$

Il modello circuitale che ne deriva è denominato *modello a parametri z* o *parametri impedenza*, dato che i coefficienti delle correnti rappresentano delle impedenze. I parametri z si possono determinare mediante rapporti tensione-corrente, nella condizione che una delle due correnti sia nulla:

$$\bar{z}_{11} = \left. \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} \right|_{\bar{I}_2=0} \quad \bar{z}_{12} = \left. \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2} \right|_{\bar{I}_1=0} \quad \bar{z}_{21} = \left. \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_1} \right|_{\bar{I}_2=0} \quad \bar{z}_{22} = \left. \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} \right|_{\bar{I}_1=0} \quad [2]$$

Si noti come le condizioni $\bar{I}_1 = 0$ e $\bar{I}_2 = 0$ corrispondano operativamente alla apertura dei terminali rispettivamente di ingresso e di uscita, in modo tale da annullare le correnti. Pertanto, nei casi specifici, per determinare i parametri z , sia dal punto di vista teorico che sperimentale, si devono conoscere i rapporti tensione-corrente avendo aperto la opportuna coppia di terminali.

Si consideri ora il quadripolo di fig. 6.1i.3; poiché il suo comportamento è descritto dalle [1], rappresenta il circuito equivalente a parametri z di un qualsiasi quadripolo lineare (scrivendo le equazioni alla maglia ed elidendo i termini opposti si ottengono le [1]).

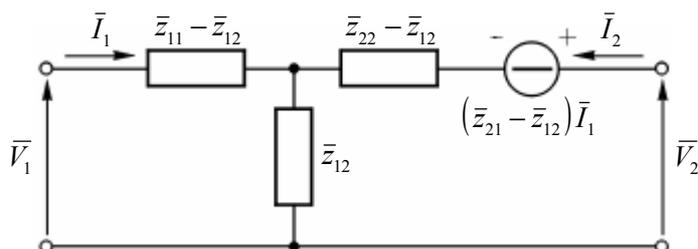


Fig. 6.1i.3
Circuito equivalente a parametri z di un quadripolo lineare.

Nel caso dei quadripoli passivi, si può dimostrare il cosiddetto *teorema di reciprocità*, espresso nella seguente forma:

$$\bar{z}_{12} = \bar{z}_{21} \quad [3]$$

Pertanto per i quadripoli passivi la *f.e.m.* del generatore dipendente di fig. 6.1i.3 si annulla (cortocircuito), e si ottiene il circuito di fig. 6.1i.4, denominato *modello a T* per il tipo di disposizione delle impedenze. Si tenga presente che nella determinazione di \bar{z}_{12} e \bar{z}_{21} sarà opportuno valutare la soluzione che presenti minore complessità nei calcoli.

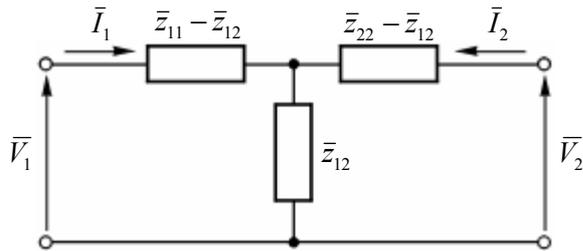


Fig. 6.1i.4
Modello a *T* di un quadripolo lineare passivo.

ESEMPIO 6.1i.1

Determinare il modello a *T* del quadripolo di fig. 6.1i.5a, dove $R = 100 \Omega$.

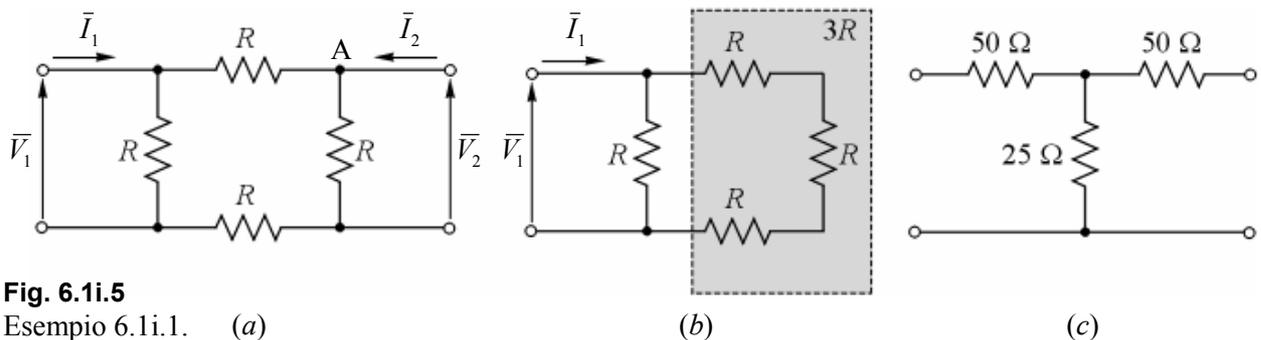


Fig. 6.1i.5
Esempio 6.1i.1. (a) (b) (c)

SOLUZIONE

Poiché il quadripolo non comprende reattanze, i parametri z sono puramente resistivi. R_{11} è pari alla resistenza vista dai morsetti di ingresso, a morsetti di uscita aperti (fig. 6.1i.5b): $R_{11} = 3R // R = 75 \Omega$. R_{22} è pari alla resistenza vista dai morsetti di uscita, a morsetti di ingresso aperti; il quadripolo è simmetrico e pertanto si ha $R_{22} = R_{11} = 75 \Omega$. Per determinare R_{12} si deve calcolare la tensione di ingresso prodotta dall'applicazione di una corrente \bar{I}_2 , a morsetti di ingresso aperti ($\bar{I}_1 = 0$); per la legge del derivatore di corrente, \bar{I}_2 si divide nel nodo A dando luogo, nel ramo superiore, ad una corrente pari a $\frac{R}{3R + R} \bar{I}_2 = 0,25 \bar{I}_2$, a cui corrisponde, per la legge di Ohm, una tensione $\bar{V}_1 = 0,25 R \bar{I}_2$; si ottiene quindi $R_{12} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2} = 0,25 R = 25 \Omega$. Il modello a *T* del quadripolo è rappresentato in fig. 6.1i.5c.

Osservazione

Poiché le due resistenze centrali sono attraversate dalla stessa corrente (fig. 6.1i.6a), possono essere considerate in serie; dallo schema equivalente 6.1i.6b il quadripolo può essere quindi ricondotto al modello a T mediante trasformazione triangolo-stella.

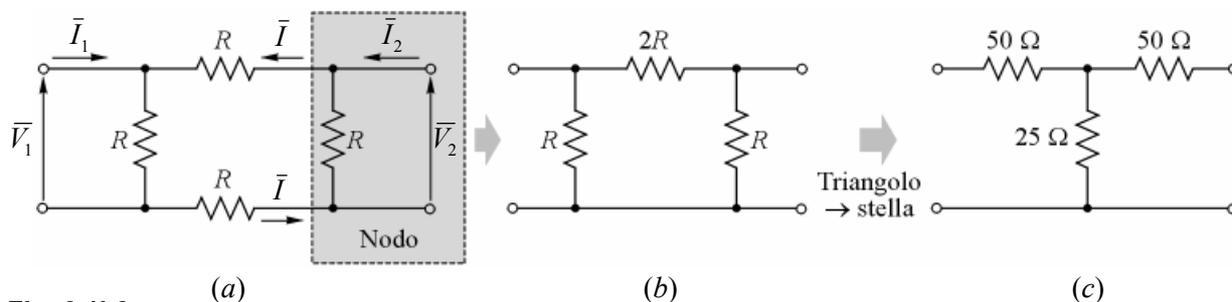


Fig. 6.1i.6
Soluzione alternativa dell'esempio 6.1i.1.

ES 6.1i.1 Determinare i parametri z e il corrispondente modello a T del quadripolo di fig. 6.1i.7.
Risposta: $R_{11} = 204 \Omega$; $R_{12} = R_{21} = 48,3 \Omega$; $R_{22} = 531 \Omega$

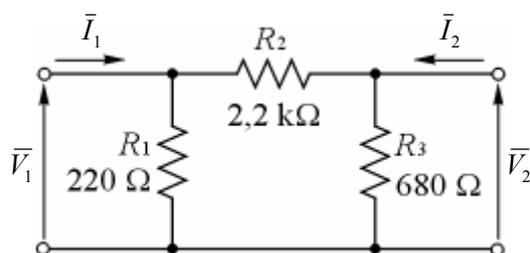


Fig. 6.1i.7
Esercizio 6.1i.1.

ES 6.1i.2 Determinare i parametri z del quadripolo di fig. 6.1i.8. *Suggerimento:* confrontare lo schema circuitale con la fig. 6.1i.4.

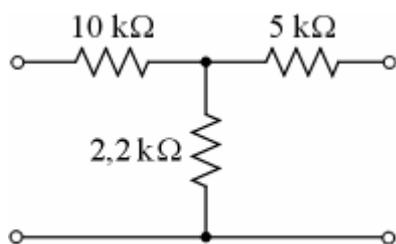


Fig. 6.1i.8
Esercizio 6.1i.2.

6.1i.3 Modello a parametri y

Scegliendo come variabili indipendenti le tensioni di ingresso e di uscita \bar{V}_1 e \bar{V}_2 , le equazioni che descrivono il comportamento del quadripolo hanno la forma

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= \bar{y}_{11}\bar{V}_1 + \bar{y}_{12}\bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 &= \bar{y}_{21}\bar{V}_1 + \bar{y}_{22}\bar{V}_2\end{aligned}\quad [4]$$

Il modello circuitale che ne deriva è denominato *modello a parametri y* o *parametri ammettenza*, dato che i coefficienti delle tensioni rappresentano delle ammettenze. I parametri y si possono determinare mediante rapporti corrente-tensione, nella condizione che una delle due tensioni sia nulla:

$$\bar{y}_{11} = \left. \frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_1} \right|_{\bar{V}_2=0} \quad \bar{y}_{12} = \left. \frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2} \right|_{\bar{V}_1=0} \quad \bar{y}_{21} = \left. \frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_1} \right|_{\bar{V}_2=0} \quad \bar{y}_{22} = \left. \frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_2} \right|_{\bar{V}_1=0} \quad [5]$$

Le condizioni $\bar{V}_1 = 0$ e $\bar{V}_2 = 0$ corrispondono operativamente alla chiusura in cortocircuito dei terminali rispettivamente di ingresso e di uscita, in modo tale da annullare le tensioni. Pertanto, nei casi specifici, per determinare i parametri y , sia dal punto di vista teorico che sperimentale, si devono conoscere i rapporti corrente-tensione mettendo in corto la opportuna coppia di terminali.

Il circuito equivalente a parametri y di un qualsiasi quadripolo lineare è rappresentato in fig. 6.1i.9 (scrivendo le equazioni ai nodi e elidendo i termini opposti si ottengono le [4]). Si noti che la parte reale dell'ammettenza centrale risulta positiva in quanto il corrispondente coefficiente di \bar{y}_{12} è negativo.

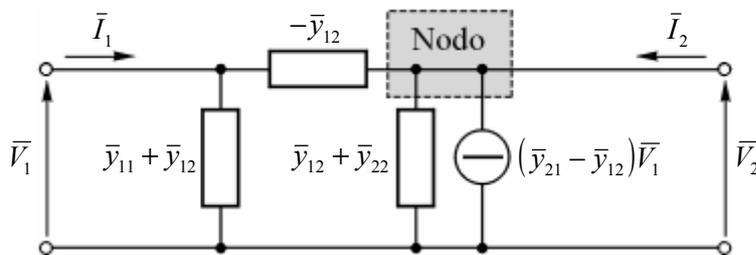


Fig. 6.1i.9
Circuito equivalente a parametri y di un quadripolo lineare.

Anche in questo caso, se il quadripolo è passivo, vale il principio di reciprocità, espresso nella forma

$$\bar{y}_{12} = \bar{y}_{21} \quad [6]$$

Pertanto per i quadripoli passivi la corrente erogata dal generatore dipendente di fig. 6.1i.9 si annulla (circuitto aperto) e si ottiene il circuito di fig. 6.1i.10, denominato *modello a π* per il tipo di disposizione delle ammettenze. Anche in questo caso nella determinazione delle due ammettenze \bar{y}_{12} e \bar{y}_{21} sarà opportuno valutare la soluzione che presenti la minore complessità nei calcoli.

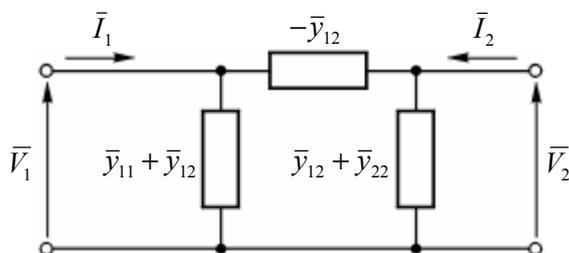


Fig. 6.1i.10
Modello a π di un quadripolo lineare passivo.

ESEMPIO 6.1i.2

Determinare il modello a π del quadripolo di fig. 6.1i.11a, dove $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \Omega$ e $R_4 = 150 \Omega$.

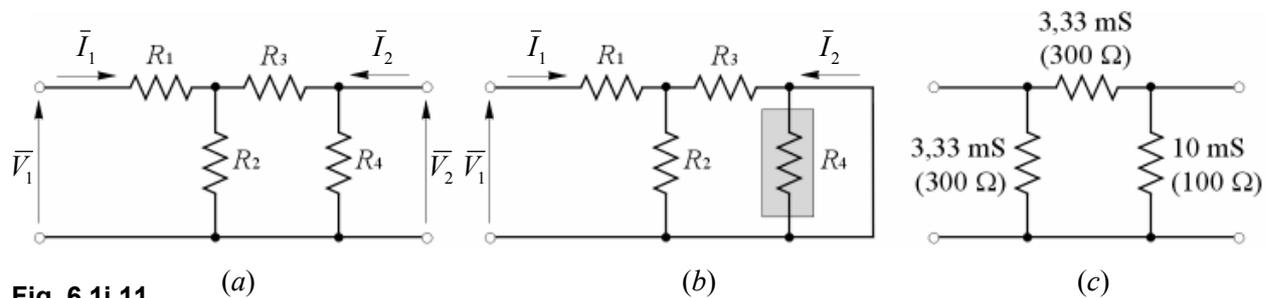


Fig. 6.1i.11
Esempio 6.1i.2.

SOLUZIONE

Poiché il quadripolo non comprende reattanze, i parametri y sono puramente conduttivi. G_{11} è pari alla conduttanza vista dai morsetti di ingresso, a morsetti di uscita in corto; escludendo R_4 perché cortocircuitata (fig. 6.1i.11b), si ottiene $G_{11} = [(R_2 // R_3) + R_1]^{-1} = 6,67 \text{ mS}$. Analogamente, ponendo in corto i morsetti di ingresso si ottiene $G_{22} = \{[(R_1 // R_2) + R_3] // R_4\}^{-1} = 13,3 \text{ mS}$. Per determinare G_{21} si deve calcolare la corrente di uscita prodotta dall'applicazione di una tensione \bar{V}_1 , a morsetti di uscita in corto ($\bar{V}_2 = 0$); con riferimento alla fig. 6.1i.11b, poiché la corrente di ingresso, pari a $\bar{I}_1 = G_{11}\bar{V}_1$, si divide nel nodo A in due parti uguali ($R_2 = R_3$), si ha $\bar{I}_2 = -\frac{1}{2}\bar{I}_1 = -\frac{1}{2}G_{11}\bar{V}_1$ (il segno meno è introdotto dai versi di riferimento delle due correnti). Si ottiene quindi $G_{21} = \frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_1} = -\frac{1}{2}G_{11} = -3,33 \text{ mS}$. Il modello a π del quadripolo è rappresentato in fig. 6.1i.11c. Si noti che il medesimo risultato può essere ottenuto applicando una trasformazione stella-triangolo al quadripolo di fig. 6.1i.11a e semplificando il circuito.

ES 6.1i.3

Determinare i parametri y e il corrispondente modello a π del quadripolo di fig. 6.1i.12.

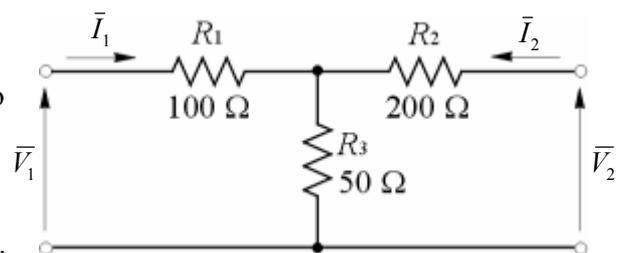


Fig. 6.1i.12
Esercizio 6.1i.3.

ES 6.1i.4

Determinare i parametri y del quadripolo di fig. 6.1i.13. *Suggerimento:* confrontare lo schema circuitale con la fig. 6.1i.10.

Risposta: $G_{11} = 7,14 \text{ mS}$; $G_{12} = G_{21} = -1,43 \text{ mS}$;
 $G_{22} = 4,29 \text{ mS}$

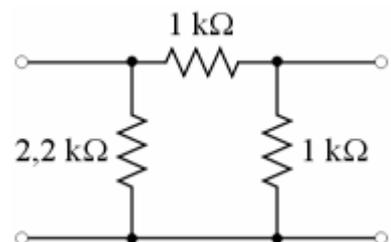


Fig. 6.1i.13
Esercizio 6.1i.4.

6.1i.4 Modelli a parametri ibridi

I modelli a parametri ibridi si ottengono considerando come variabili indipendenti le grandezze $\bar{I}_1 - \bar{V}_2$ o $\bar{V}_1 - \bar{I}_2$; nel primo caso il quadripolo è descritto dal modello a parametri h , nel secondo dal modello a parametri g (tab. 6.1i.1).

Tab. 6.1i.1 Modelli a parametri ibridi.

equazioni	parametri	circuito equivalente
$\bar{V}_1 = \bar{h}_{11}\bar{I}_1 + \bar{h}_{12}\bar{V}_2$ $\bar{I}_2 = \bar{h}_{21}\bar{I}_1 + \bar{h}_{22}\bar{V}_2$ <p>modello a parametri h</p>	$\bar{h}_{11} = \left. \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} \right _{\bar{V}_2=0}$ $\bar{h}_{12} = \left. \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} \right _{\bar{I}_1=0}$ $\bar{h}_{21} = \left. \frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} \right _{\bar{V}_2=0}$ $\bar{h}_{22} = \left. \frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_2} \right _{\bar{I}_1=0}$ <p>reciprocità: $\bar{h}_{12} = -\bar{h}_{21}$</p>	
$\bar{I}_1 = \bar{g}_{11}\bar{V}_1 + \bar{g}_{12}\bar{I}_2$ $\bar{V}_2 = \bar{g}_{21}\bar{V}_1 + \bar{g}_{22}\bar{I}_2$ <p>modello a parametri g</p>	$\bar{g}_{11} = \left. \frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_1} \right _{\bar{I}_2=0}$ $\bar{g}_{12} = \left. \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} \right _{\bar{V}_1=0}$ $\bar{g}_{21} = \left. \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} \right _{\bar{I}_2=0}$ $\bar{g}_{22} = \left. \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} \right _{\bar{V}_1=0}$ <p>reciprocità: $\bar{g}_{12} = -\bar{g}_{21}$</p>	

ES 6.1i.5 Determinare il modello a parametri h del quadripolo di fig. 6.1i.14.

Risposta: $h_{11} = 1 \text{ k}\Omega$; $h_{12} = 1$; $h_{21} = -1$; $h_{22} = 1 \text{ mS}$

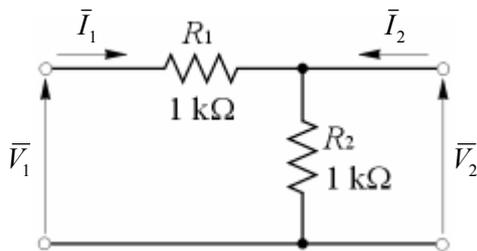


Fig. 6.1i.14
Esercizio 6.1i.5

ES 6.1i.6 Determinare il modello a parametri g del quadripolo di fig. 6.1i.14.

Risposta: $g_{11} = 0,5 \text{ mS}$; $g_{12} = -0,5$; $g_{21} = 0,5$; $g_{22} = 0,5 \text{ k}\Omega$

6.1i.5 Modelli a parametri di trasmissione

I modelli a parametri di trasmissione si ottengono scegliendo come variabili indipendenti entrambe le grandezze di ingresso o di uscita. Nel primo caso si ottiene il modello a parametri di trasmissione inversa, nel secondo il modello a parametri di trasmissione diretta. Contrariamente ai casi precedenti, i parametri di trasmissione diretta sono riferiti ad una corrente \bar{I}_2 considerata positiva quando è uscente dal quadripolo; ciò è dovuto al fatto che i modelli in questione si utilizzano nel caso di quadripoli in successione, dove la corrente di uscita di uno di essi rappresenta la corrente di ingresso di quello seguente. Mantenendo inalterato il verso di \bar{I}_2 rispetto agli schemi precedenti, la si dovrà indicare come $-\bar{I}_2$ nelle equazioni del quadripolo:

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= \bar{A}\bar{V}_2 + \bar{B}(-\bar{I}_2) \\ \bar{I}_1 &= \bar{C}\bar{V}_2 + \bar{D}(-\bar{I}_2)\end{aligned}\quad [7]$$

I coefficienti che compaiono nelle [7] si possono determinare con equazioni analoghe a quelle esaminate per gli altri modelli.

ES 6.1i.7 Scrivere le equazioni che definiscono i coefficienti delle equazioni [7].

Risolvendo il sistema [7] rispetto a \bar{V}_2 e \bar{I}_2 , si ricavano le espressioni

$$\begin{aligned}\bar{V}_2 &= \frac{\bar{D}\bar{V}_1 - \bar{B}\bar{I}_1}{\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C}} = \frac{\bar{D}\bar{V}_1}{\Delta} + \frac{\bar{B}(-\bar{I}_1)}{\Delta} \\ \bar{I}_2 &= \frac{\bar{C}\bar{V}_1 - \bar{A}\bar{I}_1}{\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C}} = \frac{\bar{C}\bar{V}_1}{\Delta} + \frac{\bar{A}(-\bar{I}_1)}{\Delta}\end{aligned}\quad [8]$$

avendo posto $\Delta = \bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C}$. Tenendo conto che i parametri di trasmissione inversa sono riferiti ad una corrente \bar{I}_1 considerata positiva se uscente, le [8] rappresentano le equazioni del quadripolo per tale modello. Per i modelli a parametri di trasmissione il teorema di reciprocità assume la forma

$$\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} = 1 \quad [9]$$

ES 6.1i.8 Determinare i parametri di trasmissione diretta e inversa del quadripolo di fig. 6.1i.15.

Risposta: $A = 1,5$; $B = 1 \text{ k}\Omega$; $C = 0,5 \text{ mS}$; $D = 1$

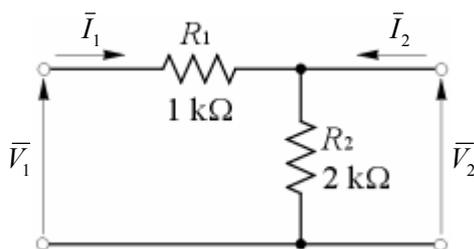


Fig. 6.1i.15
Esercizio 6.1i.8