2 STRUMENTI MATEMATICI

1 Funzioni di variabile reale

1.1 Definizione di funzione

■ Si definisce *funzione* (function) da un insieme X a un insieme Y una legge, che indicheremo con f, che associa a ciascun elemento x di X un elemento y di Y; tale elemento y viene detto immagine di x attraverso f e viene indicato con $f(x)$ (si legga: «f di x»). L'insieme X viene detto *insieme di definizione* (set of definition) o *dominio* (domain) di f, l'insieme Y viene detto *codominio* (codomain) di f. Una classe notevole di funzioni è quella in cui gli insiemi X e Y sono numerici. In questo caso x è detta *variabile indipendente* (independent variable), e y *variabile dipendente* (dependent variable). Se x e y sono numeri reali si ha una *funzione reale di variabile reale* (real function of real variable). In molti casi è possibile rappresentare una funzione numerica con un'espressione analitica, come ad es. $y = x^2$.

■ Nello studio di una funzione è opportuno differenziare le variabili dai loro valori particolari, utilizzando per quest'ultimi pedici identificativi. Se ad es. si misura la temperatura in un ambiente a intervalli di un'ora, indicando con t la variabile tempo, i vari istanti di misura possono essere espressi come $t_0 = 8.00$, $t_1 = 9.00$, ecc. Se già l'espressione della variabile contiene un pedice, si potrà sempre aggiungere a tale pedice un simbolo che indichi i valori particolari; ad es. un valore particolare di una variabile indicata con v_1, potrà essere indicato come v_{10} o v_{1a}.

1.2 Parametri

■ Nell'espressione analitica di una funzione sono in generale presenti i seguenti elementi:

– variabile indipendente;
– valori numerici;
– grandezze costanti definite *parametri* (parameters), indicate con espressioni letterarie (a, b, k, ecc.).

■ I parametri sono quantità che possono assumere diversi valori a seconda del problema specifico a cui si applica la funzione in esame, ma che devono essere considerate costanti una volta fissato il loro valore. Consideriamo a titolo di esempio un'automobile che si muove con moto rettilineo a velocità costante; se nell'istante $t_0 = 0$ l'automobile si trova nell'origine della coordinata spaziale s, il moto dell'automobile è descritto dalla funzione

(2.1) $$s = v \cdot t$$

In tale espressione il tempo trascorso t rappresenta la variabile indipendente, lo spazio percorso s rappresenta la variabile dipendente, mentre la velocità v ha le proprietà di un parametro: può assumere valori diversi da caso a caso (50 km/h, 80 km/h, 10 m/s, ecc.), ma nell'ambito di un caso specifico avrà un valore assegnato costante. Se ad es. la velocità della macchina è $v = 80$ km/h, si esprime lo spazio percorso s in kilometri in funzione del tempo t trascorso in ore mediante la relazione

(2.2) $$s = 80 \cdot t$$

1.3 Proporzionalità diretta e inversa

■ Due grandezze x e y si dicono *direttamente proporzionali* (directly proportional) quando tra esse sussiste una relazione del tipo

(2.3) $$y = kx$$

in cui k è una costante. Questo significa che il rapporto $\frac{y}{x} = k$ è costante: dati due valori di riferimento x_0 e y_0, se x raddoppia rispetto a x_0 anche y raddoppia rispetto a y_0, se x triplica anche y triplica, ecc.

■ Due grandezze x e y si dicono *inversamente proporzionali* (inversely proportional) quando tra esse sussiste una relazione del tipo

(2.4) $$y = \frac{k}{x}$$

in cui k è una costante. Questo significa che il prodotto $yx = k$ è costante: dati due valori di riferimento x_0 e y_0, se x raddoppia rispetto a x_0, y si riduce alla metà rispetto a y_0, se x triplica y si riduce a un terzo, ecc.

1.4 Legge di variazione lineare

■ Si dice che una grandezza y varia *linearmente* (linearly) con x, o che è *funzione lineare* (linear function) di x, quando tra le due grandezze sussiste una relazione del tipo

(2.5) $$y = kx + c$$

in cui k e c sono costanti. La funzione lineare 2.5 è così definita perché il corrispondente grafico è una linea retta, in cui c è l'ordinata del punto di intersezione con l'asse y, e di cui k esprime la pendenza. Per valori positivi di k, a una crescita di x corrisponde una crescita di y, per cui la retta ha l'orientamento di fig. 1*a*, in cui si evidenzia anche che a un valore maggiore di k corrisponde una pendenza più marcata; per valori negativi di k, a una crescita di x corrisponde una diminuzione di y, per cui la retta ha l'orientamento di fig. 1*b*, dove si vede che a un valore più basso (ma maggiore in modulo) di k corrisponde una pendenza più marcata.

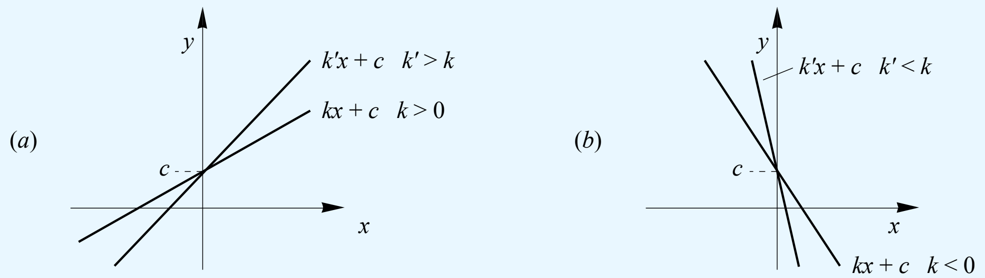

Fig. 1 Rappresentazione grafica di funzioni lineari, con pendenza (*a*) positiva e (*b*) negativa.

1.5 Grafici lineari per punti

■ La costruzione di un grafico è un metodo molto comune di rappresentare in maniera immediata e unificata le informazioni relative alla dipendenza tra due o più grandezze. Nel caso in cui il fenomeno sia descritto da un'espressione analitica, la curva che costituisce il diagramma della funzione può essere studiata, e quindi tracciata, con metodi propri dell'analisi matematica. È possibile, alternativamente, individuare una serie di punti assegnando un valore alla variabile indipendente e calcolando il corrispondente valore della variabile dipendente; tali punti saranno poi riportati in un sistema di coordinate, e uniti da una curva che sarà più o meno approssimata in relazione alla vicinanza tra punti successivi (questa operazione può essere eseguita più efficacemente e rapidamente mediante strumenti informatici). Nel caso in cui non si abbia un'espressione analitica, ma una serie di misure in forma tabellare, si riportano sul grafico i punti corrispondenti alle misure effettuate, unendoli successivamente con una curva continua.

■ Un grafico lineare è un grafico in cui a uguali intervalli sugli assi corrisponde sempre il medesimo valore. Il punto di partenza della costruzione di un grafico lineare consiste nella scelta delle scale, e cioè dei valori da assegnare a ciascuna divisione (ad es. a ogni cm), per ciascun asse. Assegnate le scale, è sufficiente osservare alcune regole, dipendenti in certa misura dalle preferenze personali o dai casi particolari, tendenti ad assicurare la leggibilità del grafico.

■ I valori da assegnare alle due scale devono essere dettati da alcune considerazioni:

1. Il grafico deve essere facilmente eseguibile e decifrabile, per cui è consigliabile utilizzare scale in cui si hanno 1, 2 o 5 unità di misura per cm, moltiplicate eventualmente per una potenza di 10 (0,1 / 0,2 / 0,5 / 1 / 2 / 5 / 10 / 20 / 50 / 100 / ecc.).
2. Le scale devono essere tali da contenere tutti i punti della tabella, sfruttando contemporaneamente al massimo lo spazio disponibile sul foglio.

Per individuare i valori adatti è sufficiente dividere il range di valori associato a ciascuna variabile per il relativo numero di centimetri a disposizione, ottenendo un valore che, se fosse adottato come scala, consentirebbe di contenere esattamente nell'asse il range specificato. Si sceglie quindi come scala il valore immediatamente più grande che risponda alle esigenze evidenziate nel punto 1.

Esempio 1

Si supponga di dover costruire un grafico con i dati della tab. 1, risultante dalla rilevazione dello spazio s percorso da un'automobile al passare del tempo t. Si immagini inoltre di avere a disposizione un foglio di carta millimetrata rettangolare di dimensioni 24 × 18 cm e di voler eseguire il grafico posizionando l'asse del tempo sul lato maggiore. Per l'asse orizzontale si dispone di 24 cm; il range di variabilità di t è pari a $t_{max} - t_{min} = 5 - 0 = 5$ h. Dato che 5 : 24 = 0,208 h/cm, si sceglie come scala orizzontale 0,5 h/cm. Per l'asse verticale si dispone di 18 cm; il range di variabilità di s è pari a $s_{max} - s_{min} = 250 - (-50) = 300$ km. Dato che 300 : 18 = 16,7 km/cm, si sceglie come scala verticale 20 km/cm.

Tab. 1 Esempio 1.

t (h)	s (km)
0	–50
1	0
2	70
3	150
4	200
5	250

■ In alcuni casi, quando sono presenti punti isolati in cui una grandezza ha un valore così elevato da determinare un eccessivo ravvicinamento degli altri punti, è possibile eliminare un intervallo di valori dal relativo asse, segnalando l'interruzione con la simbologia di fig. 2.

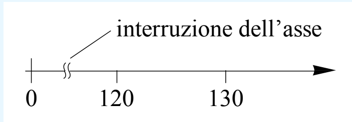

Fig. 2 Interruzione dell'asse cartesiano.

■ Una volta determinate le scale da utilizzare si costruisce il grafico mediante i seguenti elementi (si veda la fig. 3, in cui è rappresentato il grafico relativo all'esempio 1):

– Assi. Vanno orientati e posti sulle righe marcate presenti a ogni cm oppure ogni 5 cm.
– Variabile indipendente (asse orizzontale) e variabile dipendente (asse verticale). Devono essere riportate alla fine dei due assi.
– Unità di misura. Devono essere indicate tra parentesi dopo le rispettive grandezze fisiche.
– Valori assegnati alle scale. Vanno riportati in corrispondenza del primo centimetro di ciascun asse.
– Valori di riferimento sugli assi. Si possono riportare i valori corrispondenti a passi di 5 cm partendo dall'origine.
– Punti *visibili* relativi ai valori in tabella e curva di raccordo dei punti inseriti.
– Eventuali linee tratteggiate in corrispondenza di punti particolari del grafico che si vogliono evidenziare rispetto agli altri.

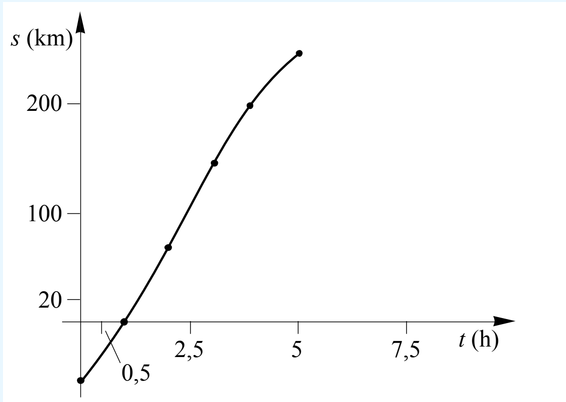

Fig. 3 Grafico relativo alla tabella 1.

■ Di seguito sono riportati alcuni errori in cui si incorre comunemente nella costruzione di un grafico:

– Posizionamento degli assi su linee intermedie rispetto a quelle marcate.
– Riporto sugli assi dei valori relativi alla tabella. A tale proposito si ricorda che il grafico ha il fine di mostrate in maniera immediata e unificata le informazioni contenute nella tabella. Se si è interessati a un punto particolare del grafico si potranno sempre ricavarne le relative coordinate mediante il reticolo.
– Disegno di linee tratteggiate che uniscono tutti i punti agli assi.
– Unione dei punti mediante segmenti. La rappresentazione con una curva priva di spigoli descrive con maggior attendibilità la realtà di una funzione o di un fenomeno fisico.

Esercizio 1

Costruire un grafico a partire dalla tabella 1 in un riquadro di dimensioni 15 × 8 cm.

Esercizio 2

Costruire tabella e grafico delle seguenti funzioni:

a) $y = 2x - 4$ per $0 \le x \le 10$.

b) $y = \dfrac{4}{x}$ per $100 \le x \le 120$.

1.6 Valore medio

■ Si consideri una funzione $f(x)$ di andamento qualsiasi, come ad es. quello di fig. 4. È possibile definire come *valore medio* $\langle f \rangle$ del segnale (mean value), in un certo intervallo Δx[1], il livello che si otterrebbe immagi-

[1] Si ricorda che con la notazione Δx si rappresenta un intervallo assegnato della variabile x; indicando con x_1 e x_2 gli estremi dell'intervallo, Δx può indicare sia l'intervallo stesso $[x_1 ; x_2]$, sia la sua estensione $x_2 - x_1$.

nando di «spianare» il segnale (come se rappresentasse la conformazione di un terreno) nell'ambito dell'intervallo considerato; pertanto, le aree individuate da $f(x)$ superiormente al livello $\langle f \rangle$ devono avere un'estensione pari a quella delle aree individuate inferiormente (vd. fig. 4).

■ Nel caso in cui sia nota l'espressione analitica del segnale in esame, è possibile, con metodi matematici avanzati, calcolarne l'esatto valore medio nell'intervallo Δx; alternativamente, si può ottenere un valore medio approssimato considerando nell'intervallo Δx n valori $x_1, x_2, ..., x_n$ equamente distanziati, ed eseguendo la media dei corrispondenti valori $f_1, f_2, ..., f_n$ della funzione:

(2.6) $$\langle f \rangle = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}{n}$$

Il risultato della 2.6 è approssimato, perché calcolato su un numero limitato di valori, ma si avvicina tanto più al valore esatto quanto più è alto il numero n dei valori considerati in Δx; in particolare, utilizzando un software specifico, è possibile calcolare la media su un numero elevatissimo di valori, ottenendo un risultato praticamente identico al valore esatto.

Esercizio 3

Determinare, per punti, il valore medio della funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $0 \le x \le 10$. *Risposta*: $\langle f \rangle = 0,333$ (il risultato ottenuto per punti può discostarsi da tale valore)

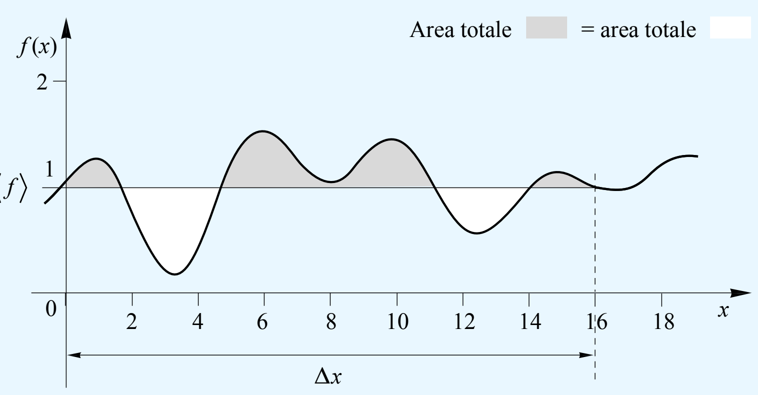

Fig. 4 Valore medio di un segnale in un intervallo Δx.

2 Funzione esponenziale

■ Dall'algebra elementare si conosce come elevare un numero reale a a una potenza con esponente intero naturale n:

(2.7) $$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

Definendo $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ e $a^{\left(\frac{p}{q}\right)} = \sqrt[q]{a^p}$ è possibile estendere la nozione di potenza a esponenti prima negativi e quindi razionali, per arrivare a definire, più in generale, il significato di elevazione di un numero reale $a > 0$ a una potenza con esponente reale. Se x è una variabile reale, è definita la *funzione esponenziale* (exponential function) di base a

(2.8) $$y = a^x$$

Si assuma $a \neq 1$ dato che per $a = 1$ la funzione si riduce al valore costante 1. Il grafico della funzione esponenziale, con $a > 1$, è rappresentato in fig. 5*a*. Si noti che $a^0 = 1$ per qualsiasi valore di a. Con $a < 1$ il grafico della funzione esponenziale si modifica come in fig. 5*b*; lo stesso tipo di grafico si può attribuire alla funzione

(2.9) $$y = a^{-x}$$

con $a > 1$, che corrisponde a un esponenziale $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ di base $\frac{1}{a} < 1$.

■ Una proprietà notevole delle funzioni esponenziali consiste nella progressività relativa costante, che sarà spiegata con riferimento alla funzione decrescente $y = a^{-x}$, con $a > 1$. Si consideri un intervallo $[x_0 ; x_0 + \Delta x]$ sull'asse orizzontale; il corrispondente intervallo $[y_0 ; y_0 + \Delta y]$ sull'asse verticale ha un'estensione pari a

(2.10) $$\Delta y = a^{-(x_0 + \Delta x)} - a^{-x_0}$$

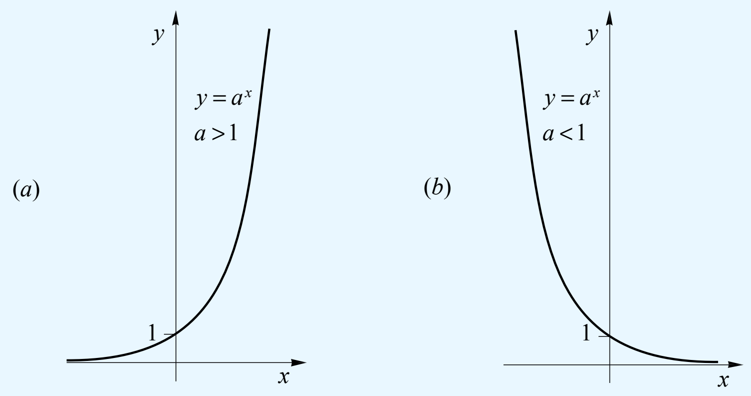

Fig. 5 Grafici della funzione esponenziale.

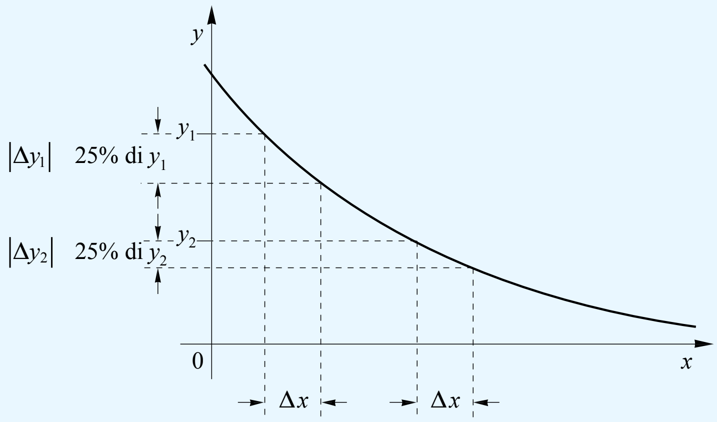

Fig. 6 Caratteristiche di variazione di a^{-x}.

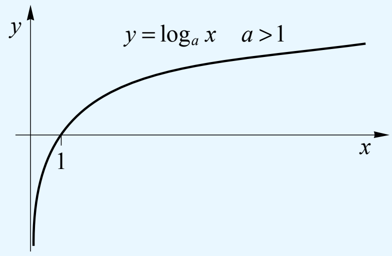

Fig. 7 Grafico della funzione logaritmica.

La variazione relativa, e cioè il rapporto tra Δy e il valore iniziale y_0, è pari a

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \frac{a^{-(x_0+\Delta x)} - a^{-x_0}}{a^{-x_0}} = a^{-(x_0+\Delta x)} \cdot a^{x_0} - 1 = a^{-(x_0+\Delta x)+x_0} - 1 = a^{-\Delta x} - 1 \tag{2.11}$$

Come si vede, tale rapporto dipende solo da Δx e non dal valore iniziale x_0; ciò significa che, a parità di variazione Δx, la variazione relativa $\frac{\Delta y}{y_0}$, o anche la variazione percentuale $\frac{\Delta y}{y_0} \cdot 100\%$, è sempre uguale (fig. 6).

Esercizio 4

Verificare la validità di quanto rappresentato in fig. 6, calcolando le variazioni della funzione $y = e^{-x}$ corrispondenti a variazioni di x pari a 1, a partire dai seguenti valori: 0, 2, 4.

3 Funzione logaritmica

■ Dati a e b reali, con $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, si definisce *logaritmo* (logarithm) di b in base a, indicato con $\log_a b$, quel numero reale c tale che si abbia $a^c = b$. Se x è una variabile reale > 0, è definita la *funzione logaritmica* (logarithmic function) in base a

$$y = \log_a x \tag{2.12}$$

Il grafico della funzione logaritmica, per $a > 1$, è rappresentato in fig. 7. Si noti che $\log_a 1 = 0$ ($a^0 = 1$ per qualsiasi valore di a). I sistemi di logaritmi più usati sono quelli in base e (numero di Nepero pari a 2,718...), detti logaritmi naturali o neperiani e indicati nel seguito con $\ln x$, e quelli in base 10, detti logaritmi decimali e indicati nel seguito con $\log x$.

Esercizio 5

Determinare il valore dei seguenti logaritmi decimali: log100; log0,001; log1; log10000.

■ Le funzioni logaritmiche hanno alcune proprietà notevoli, che le rendono particolarmente utili nei campi dell'elettronica e delle telecomunicazioni. Una di esse consiste nel fatto che il logaritmo di un prodotto è pari alla somma dei logaritmi dei fattori. Per la definizione di logaritmo, e dalle proprietà degli esponenziali, si ha

$$a^{(\log_a b + \log_a c)} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = bc = a^{\log_a (bc)} \tag{2.13}$$

da cui

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c \tag{2.14}$$

Valgono inoltre le seguenti relazioni, qui per brevità solo richiamate:

$$\begin{aligned} &\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \\ &\log_a b^m = m \log_a b && \text{(da cui in particolare } \log_a b^{-1} = -\log_a b\text{)} \\ &\log_{a'} b = \log_a b \cdot \left(\log_a a'\right)^{-1} && \text{(cambiamento di base)} \end{aligned} \tag{2.15}$$

■ La funzione logaritmica, in quanto funzione inversa di quella esponenziale, gode di una proprietà complementare rispetto a quest'ultima. Si consideri un intervallo $[x_0 ; x_0 + \Delta x]$ sull'asse orizzontale; il corrispondente intervallo $[y_0 ; y_0 + \Delta y]$ sull'asse verticale ha un'estensione pari a

$$\Delta y = \log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a x_0 = \log_a \frac{x_0 + \Delta x}{x_0} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right) \tag{2.16}$$

Poiché $\frac{\Delta x}{x_0}$ rappresenta la variazione relativa della variabile indipendente, la relazione 2.16 indica che a una certa variazione relativa di x, espressa anche in termini di variazioni percentuali $\frac{\Delta x}{x_0} \cdot 100\%$, corrisponde una variazione assoluta Δy indipendente dal valore di partenza x_0 (fig. 8).

Esercizio 6

Verificare la validità di quanto rappresentato in fig. 8, calcolando le variazioni della funzione $y = \log x$ corrispondenti a variazioni percentuali di x del 50%, a partire dai seguenti valori: 1, 10, 100.

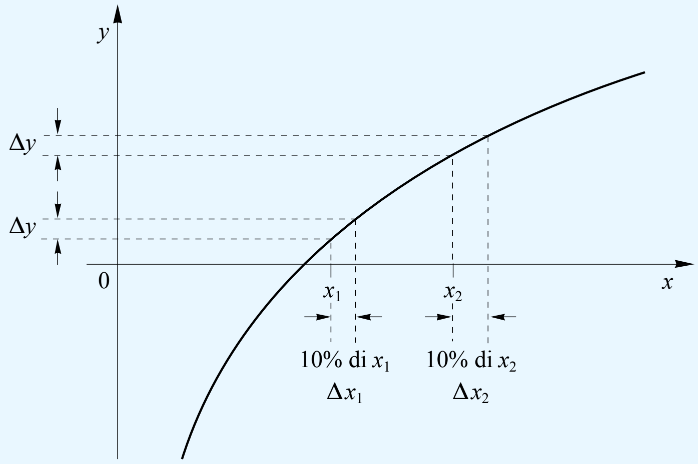

Fig. 8 Caratteristiche di variazione di $\log_a x$.

4 Funzioni trigonometriche

4.1 Misura degli angoli

■ L'unità di misura degli angoli utilizzata nella vita di tutti i giorni è il *grado sessagesimale* (sexagesimal degree), definito facendo corrispondere l'angolo giro a 360 gradi (si scrive 360°). Anche se spesso esprimeremo gli angoli in gradi per praticità, in ambito scientifico è unanimemente adottato, come unità di misura degli angoli, il *radiante* (radian), quantità adimensionale definita facendo corrispondere l'angolo giro a 2π radianti. La misura degli angoli in radianti facilita la trattazione matematica, poiché permette di esprimere la lunghezza di un arco di circonferenza come il prodotto tra il raggio e l'angolo che sottende l'arco stesso (fig. 9*a*).

■ La nozione di angolo come porzione di piano, e quindi positivo e compreso tra 0 e 2π, può essere estesa facendo riferimento all'idea di arco orientato (fig. 9*b*); in questo caso un angolo ha segno positivo o negativo, e non è limitato nei possibili valori dato che la rotazione tra le semirette che lo delimitano può continuare oltre il giro completo.

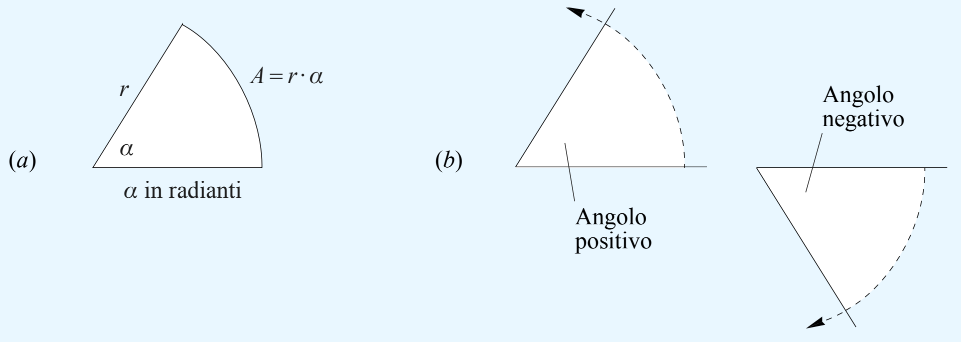

Fig. 9 (*a*) Misura di un angolo in radianti; (*b*) archi orientati.

4.2 Funzioni seno e coseno

■ Si immagini di posizionare un'asticella lunga un metro come in fig. 10*a*, illuminandola dall'alto a sinistra. La lunghezza dell'ombra dell'asticella sul muro, misurata in metri (ma privata poi dell'unità di misura), è per definizione il *seno* (sine) dell'angolo α con cui l'asticella stessa è inclinata; la lunghezza dell'ombra sul pavimento, in metri (anch'essa privata dell'unità di misura), è per definizione il *coseno* (cosine) di α. In linguaggio più strettamente matematico: dati un sistema di assi cartesiani, una circonferenza di centro nell'origine e raggio 1, e un angolo α (fig. 10*b*), le funzioni seno e coseno sono definite rispettivamente come le proiezioni verticale e orizzontale del segmento unitario OP. Dal teorema di Pitagora, applicato al triangolo OPQ di fig. 10*b*, si evince l'identità fondamentale della trigonometria $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

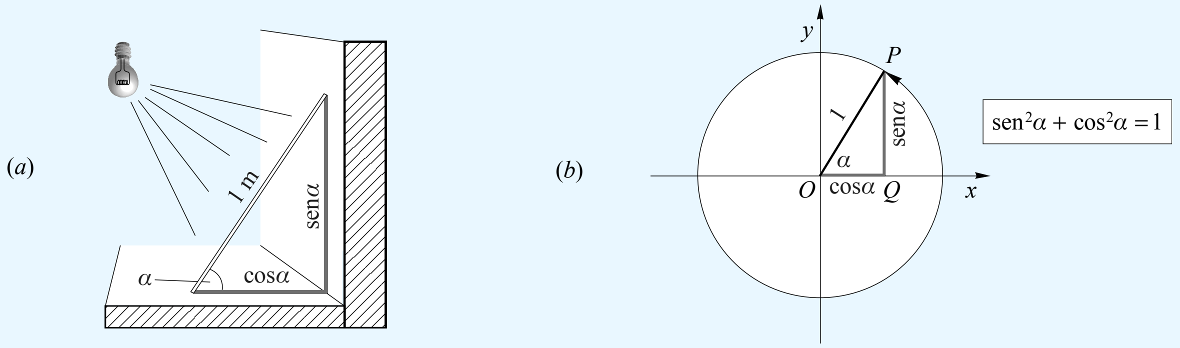

Fig. 10 Definizione di seno e coseno.

■ Al variare dell'angolo α, le proiezioni si allungano e si accorciano, nei limiti dei valori 1 (proiezione più estesa positiva) e –1 (proiezione più estesa negativa). Poiché non c'è nessun valore che un angolo non possa assumere, le funzioni seno e coseno sono definite nel dominio dei numeri reali; dato che angoli che differiscono di un angolo giro sono equivalenti dal punto di vista delle proiezioni, le due funzioni hanno un andamento ciclico (fig. 11). Come evidente dai grafici, le funzioni seno e coseno hanno lo stesso andamento, e possono trasformarsi l'una nell'altra traslando l'origine degli angoli del valore $\frac{\pi}{2}$. Si noti inoltre che la funzione seno presenta valori opposti per angoli opposti (si dice che la funzione è *dispari*, odd), mentre la funzione coseno presenta identici valori per angoli opposti (si dice che la funzione è *pari*, even). Ulteriori definizioni sono riportate schematicamente in tab. 2.

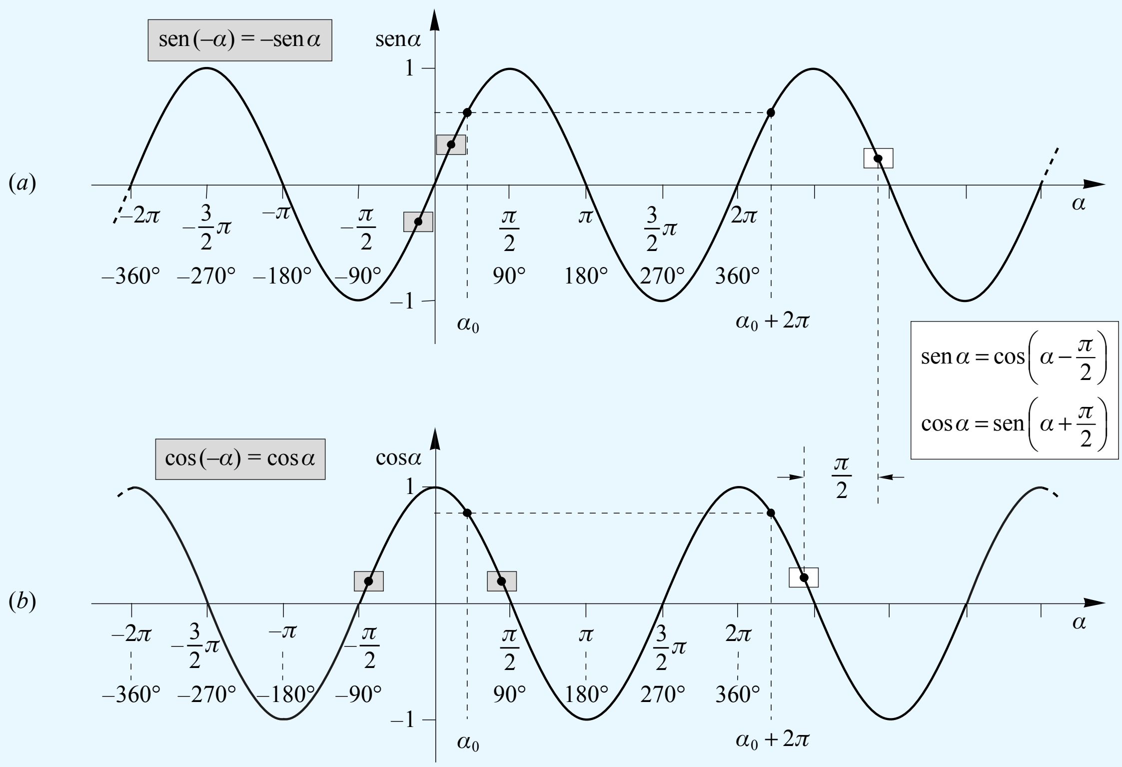

Fig. 11 Grafici delle funzioni (*a*) seno e (*b*) coseno.

Tab. 2 Funzioni trigonometriche

funzione	notazione	funzione inversa	notazione
Seno	$\operatorname{sen} x$	Arcoseno	$\operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{sen}^{-1} x$
Coseno	$\cos x$	Arcocoseno	$\arccos x$, $\cos^{-1} x$
Tangente	$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	Arcotangente	$\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{tg}^{-1} x$
Cotangente	$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	Arcocotangente	$\operatorname{arcctg} x$, $\operatorname{ctg}^{-1} x$

5 Numeri complessi

5.1 Definizioni

Si definisce *numero complesso* (complex number) una coppia ordinata di numeri reali (a, b), dove tra due elementi $\overline{X} = (a,\ b)$ e $\overline{Y} = (c,\ d)$ dell'insieme di tali coppie sono definite le seguenti operazioni:

(2.17) addizione: $\overline{X} + \overline{Y} = (a + c,\ b + d)$

(2.18) moltiplicazione: $\overline{X} \cdot \overline{Y} = (ac - bd,\ ad + bc)$

Sono altresì definite le seguenti operazioni inverse:

(2.19) sottrazione: $\overline{X} - \overline{Y} = (a - c,\ b - d)$ $\left[\left(\overline{X} - \overline{Y} \right) + \overline{Y} = \overline{X} \right]$

(2.20) divisione: $\dfrac{\overline{X}}{\overline{Y}} = \left(\dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2},\ \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$ $\left[\left(\dfrac{\overline{X}}{\overline{Y}} \right) \cdot \overline{Y} = \overline{X}, \text{ con } \overline{Y} \neq \overline{0} = (0,\ 0) \right]$

Esercizio 7

Eseguire la somma e la moltiplicazione dei numeri complessi $\overline{X} = (1,\ 3)$ e $\overline{Y} = (2,\ 4)$.

Definite le operazioni di base mediante le relazioni precedenti, è possibile ora esprimere i numeri complessi mediante la somma di una *parte reale* (real part) a e di una *parte immaginaria* (imaginary part) jb, e cioè nella *forma reale-immaginaria* (real-imaginary form)

(2.21) $\overline{X} = a + jb$

Si potranno adesso eseguire le quattro operazioni come se si trattasse di normali binomi, con la regola che ove si trovi un prodotto $j \cdot j$ lo si deve sostituire con -1. Il termine j della parte immaginaria è definito *unità immaginaria* (imaginary unit), mentre il termine b è definito *coefficiente dell'immaginario* (imaginary coefficient). Nel caso in cui si abbia $b = 0$ il numero complesso è reale; nel caso in cui si abbia $a = 0$ il numero complesso è detto *immaginario puro* (pure imaginary). La quantità

(2.22) $X = \sqrt{a^2 + b^2}$

è definita *modulo* (modulus) del numero complesso $\overline{X}$ (si noti, nella 2.22, l'assenza della linea superiore, che distingue il modulo dal numero complesso). Dato un numero complesso $\overline{X} = a + jb$, è definito *complesso coniugato* (complex conjugate) di $\overline{X}$ il numero $\overline{Y} = a - jb$, indicato con $\overline{X}^*$.

Esercizio 8

Ricavare le espressioni equivalenti alle 2.17 e 2.18 utilizzando la notazione $\overline{X} = a + jb$ ed eseguendo le operazioni con le regole dei binomi.

Esercizio 9

Eseguire la somma e la moltiplicazione dei numeri complessi $\overline{X} = 1 + j3$ e $\overline{Y} = 2 + j4$. Verificare la corrispondenza con i risultati ottenuti nell'esercizio 7.

5.2 Corrispondenza tra numeri complessi, punti di un piano cartesiano e vettori bidimensionali

Dato che un numero complesso, così come un punto di un piano cartesiano, è identificato dal valore di due numeri reali a e b, è possibile associare a ogni numero complesso $\overline{X} = a + jb$ il punto del piano cartesiano di coordinate (a, b): a un dato numero complesso corrisponderà un punto e viceversa. Per rendere più evidente la corrispondenza è possibile identificare i due assi con *Re* (parte reale) e *Im* (coefficiente dell'immaginario), come in fig. 12*a*.

La corrispondenza individuata può essere estesa ai vettori di coordinate (a, b), rappresentati graficamente da un segmento orientato che unisce l'origine con il punto di coordinate (a, b) (fig. 12*b*). Nel seguito indicheremo vettori e numeri complessi corrispondenti con lo stesso simbolo. Per il teorema di Pitagora, applicato al triangolo rettangolo che ha per cateti a e b e per ipotenusa la distanza dall'origine, il modulo di $\overline{X}$ corrisponde alla distanza del punto (a, b) dall'origine oppure, che è la stessa cosa, alla lunghezza del vettore di coordinate (a, b).

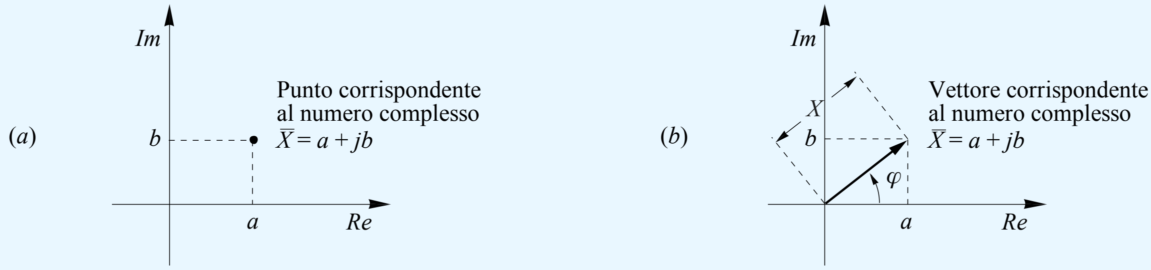

Fig. 12 Corrispondenza tra numeri complessi, (*a*) punti di un piano cartesiano e (*b*) vettori bidimensionali.

5.3 Forma trigonometrica

■ Con riferimento alla fig. 12*b*, essendo

$$\begin{aligned} a &= X\cos\varphi \\ b &= X\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{aligned} \tag{2.23}$$

dove φ è l'angolo orientato formato dal vettore e dall'asse orizzontale, si può scrivere

$$\bar{X} = X\cos\varphi + jX\,\mathrm{sen}\,\varphi = X(\cos\varphi + j\,\mathrm{sen}\,\varphi) \tag{2.24}$$

L'espressione 2.24 è denominata *forma trigonometrica* (trigonometric form) del numero complesso. L'angolo orientato φ, che in ambito vettoriale è denominato fase, nel campo nei numeri complessi è definito *argomento* (argument). Al fine di determinare φ conoscendo a e b, in alcuni testi viene indicata la divisione membro a membro delle 2.23:

$$\frac{b}{a} = \frac{X\,\mathrm{sen}\,\varphi}{X\cos\varphi} = \mathrm{tg}\,\varphi \tag{2.25}$$

e il conseguente risultato

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} \tag{2.26}$$

In realtà, l'espressione 2.26 *non è corretta*. A titolo di esempio, si ponga $\bar{X} = -1 + j$ e quindi $a = -1$ e $b = 1$; dalla 2.26 si ottiene $\varphi = \mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, mentre evidentemente l'argomento di $\bar{X}$ è $\frac{3}{4}\pi$. Il problema è il seguente: il valore corretto di φ non può essere restituito dalla 2.26, in quanto la funzione arcotangente varia nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. In altre parole, la funzione $\mathrm{arctg}\frac{b}{a}$ non interpreta correttamente i segni di a e b poiché questi sono in rapporto tra loro, e restituisce sempre un angolo del 1° o 2° quadrante. In definitiva la 2.26 deve essere così modificata:

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} + k\pi \qquad \begin{aligned} k &= 0 \quad \text{per } a \geq 0 \\ k &= 1 \quad \text{per } a < 0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Esercizio 10

Determinare la forma trigonometrica, con argomento in radianti, dei numeri complessi $\bar{X} = 3 - j4$ e $\bar{Y} = -2 + j5$.

Esercizio 11

Determinare la forma reale-immaginaria del numero complesso corrispondente al vettore rappresentato in fig. 13.

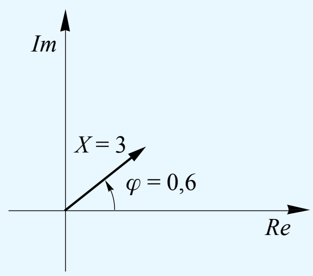

Fig. 13 Esercizio 11.

5.4 Forma esponenziale

■ Una *funzione di variabile complessa* (function of complex variable) è una legge $\bar{Y} = f(\bar{X})$ che associa a ciascun valore della variabile indipendente $\bar{X}$ un valore della variabile dipendente $\bar{Y}$. Nel campo complesso, per ogni valore di $\bar{X} = a + jb$, è definita la seguente funzione esponenziale:

$$e^{\bar{X}} = e^{a}(\cos b + j\,\mathrm{sen}\,b) \tag{2.28}$$

È possibile dimostrare che l'esponenziale complesso così definito gode di proprietà analoghe a quelle dell'esponenziale reale (che assimila per valori reali di $\bar{X}$), tra cui, in particolare:

(2.29) $$e^{\overline{X}_1} \cdot e^{\overline{X}_2} = e^{\overline{X}_1 + \overline{X}_2} \qquad e^{\overline{0}} = 1$$

Ponendo nella 2.28 valori di $\overline{X}$ pari a jb e a $-jb$, si ottengono le *formule di Eulero* (Euler formulas), qui riportate con le relative formule inverse:

(2.30) $$e^{jb} = \cos b + j\,\text{sen}\, b \qquad \cos b = \frac{e^{jb} + e^{-jb}}{2}$$
$$e^{-jb} = \cos(-b) + j\,\text{sen}(-b) = \cos b - j\,\text{sen}\, b \qquad \text{sen}\, b = \frac{e^{jb} - e^{-jb}}{2j}$$

■ Dalla prima delle 2.30, per confronto con la 2.24, risulta che un numero complesso può essere espresso nella *forma esponenziale*

(2.31) $$\overline{X} = Xe^{j\varphi}$$

che risulta di più comoda applicazione nei casi in cui si abbia a che fare con moltiplicazioni tra numeri complessi.

5.5 Moltiplicazioni tra numeri complessi

■ Si vuole esaminare ora quale effetto abbia la moltiplicazione di un numero complesso $\overline{X}$ per un secondo numero complesso $\overline{Y}$, ovvero quali proprietà abbia il risultato $\overline{P}$ del prodotto rispetto al numero $\overline{X}$. Esprimendo i due fattori in forma esponenziale, e cioè come $\overline{X} = Xe^{\varphi}$ e $\overline{Y} = Ye^{\theta}$, si ottiene:

(2.32) $$\overline{P} = \overline{X} \cdot \overline{Y} = Xe^{\varphi} \cdot Ye^{\theta} = XYe^{\varphi + \theta}$$

Il numero complesso $\overline{P}$ ha pertanto modulo pari a XY e argomento pari a $\varphi + \theta$. Nella rappresentazione vettoriale (fig. 14), il vettore $\overline{P}$ ha modulo diverso da quello di $\overline{X}$ di un fattore Y, e, avendo fase pari a $\varphi + \theta$, risulta ruotato rispetto a $\overline{X}$ della quantità θ (in verso antiorario se θ è positivo, in verso orario se θ è negativo).

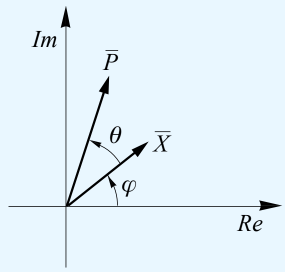

Fig. 14 Moltiplicazione di un numero complesso per $\overline{Y} = Ye^{\theta}$.

■ Saranno ora considerati alcuni casi particolari di moltiplicazione per un numero complesso, la cui semplicità consente di utilizzare senza problemi la più familiare rappresentazione reale-immaginaria.

Moltiplicazione per un numero reale $k > 0$

■ Moltiplicando un generico numero complesso $\overline{X} = a + jb$ per un numero reale $k > 0$ si ottiene il numero complesso $\overline{P} = (a + jb) \cdot k = ka + jkb$. Il corrispondente vettore, rappresentato in fig. 15*a*, ha una lunghezza pari a quella del vettore corrispondente a $\overline{X}$ moltiplicata per k (verificare che $P = kX$), stessa direzione di quest'ultimo (applicare la 2.27) e stesso verso, dato che $k > 0$.

Moltiplicazione per j

■ Moltiplicando un generico numero complesso $\overline{X} = a + jb$ per l'unità immaginaria j si ottiene il numero complesso $\overline{P} = (a + jb) \cdot j = ja + j \cdot jb = -b + ja$. Il corrispondente vettore, rappresentato in fig. 15*b*, ha la stessa lunghezza del vettore corrispondente a $\overline{X}$ (verificare che $P = X$), ed è ruotato di $\frac{\pi}{2}$ in verso antiorario rispetto a quest'ultimo (si verifica facilmente considerando che la somma dei due angoli non retti di un triangolo rettangolo è pari a $\frac{\pi}{2}$).

Moltiplicazione per $-j$

■ Moltiplicando un generico numero complesso $\overline{X} = a + jb$ per $-j$ si ottiene il numero complesso $\overline{P} = (a + jb) \cdot -j = -ja - (j \cdot j)b = b - ja$. Il corrispondente vettore, rappresentato in fig. 15*c*, ha la stessa lunghezza del vettore corrispondente a $\overline{X}$, ma in questo caso è ruotato di $\frac{\pi}{2}$ in verso orario rispetto a quest'ultimo.

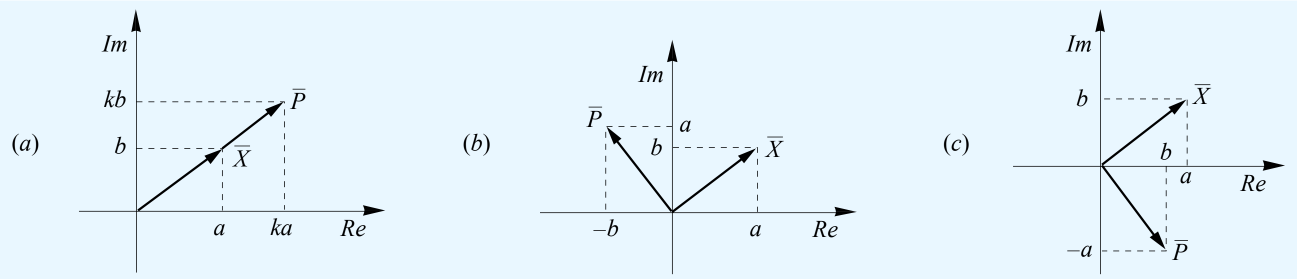

Fig. 15 Moltiplicazione di un numero complesso (*a*) per un numero reale $k > 0$, (*b*) per j, (c) per $-j$.

6 Aspetti computazionali

6.1 Cifre significative

■ In generale, si definisce *cifra significativa* (significant digit) una cifra avente valore diverso da zero. Considerando ad es. il numero 0,023, diremo che le prime due cifre non sono significative; cambiando la notazione con la quale rappresentare il numero, queste cifre possono non comparire: $0{,}023 = 23 \cdot 10^{-3}$. In matematica sono considerati non significativi anche gli zeri che terminano un numero, che non devono essere riportati se si trovano a destra della virgola; ad es. i numeri 0,023 e 0,0230 indicano lo stesso punto sull'asse dei numeri reali, che quindi deve essere espresso nella forma più breve. In modo equivalente se gli zeri finali si trovano a sinistra della virgola possono essere omessi cambiando notazione: $35400 = 354 \cdot 10^2$. Si noti che gli zeri intermedi, pur rappresentando per definizione cifre non significative, *sono nella prassi comune inclusi nel numero di cifre significative associato a un numero*. Diremo pertanto che il numero di cifre significative dei numeri 0,023 / 35400 / 6,037 è rispettivamente due, tre e quattro.

Esercizio 12

Indicare il numero di cifre significative dei seguenti valori: 0,00605; 76800; 409,30.

■ Se un certo numero rappresenta il risultato approssimato di un calcolo, o è l'espressione di una misura, gli zeri finali devono essere considerati in modo diverso. In questo caso infatti il numero in questione non rappresenta un punto, ma un intervallo sull'asse dei numeri reali, nell'espressione del quale risulta determinante l'eventuale presenza di zeri finali. Prima di proseguire con un esempio è opportuno ricordare il procedimento di approssimazione di un numero al fine di ottenere un'espressione con meno cifre.

■ Si consideri il numero $a = 2{,}38673$ e si supponga di volerne esprimerne il valore con quattro cifre, ossia con il numero a quattro cifre più vicino. In questo caso il numero che si ottiene per troncamento (2,386) differisce da a della quantità 0,00073, mentre il numero ottenuto incrementando di uno la quarta cifra (2,387) ne differisce della quantità 0,00027. Il valore di a approssimato a quattro cifre sarà dunque 2,387. In generale, detta c l'ultima cifra da mantenere e d la cifra seguente, si ha il seguente prospetto, con i relativi esempi di approssimazione a tre cifre:

$d < 5$	c rimane inalterata	approssimazione per difetto	$4{,}3623 \to 4{,}36$
$d = 5$ e seguono altre cifre $d > 5$	c deve essere incrementata di uno	approssimazione per eccesso	$84{,}357 \to 84{,}4$ $6{,}3986 \to 6{,}40$
$d = 5$ e non seguono altre cifre	le due soluzioni si equivalgono	approssimazione per difetto o per eccesso	$4{,}835 \to 4{,}83$ o $4{,}84$

Il risultato di un'approssimazione rappresenta quindi tutti i numeri che approssimati danno quel dato valore. Ad es. il valore 2,47 rappresenta i numeri $2{,}465 \le a \le 2{,}475$. Il valore 2,40 rappresenta allora i numeri $2{,}395 \le a \le 2{,}405$, mentre il valore 2,4 rappresenta i numeri $2{,}35 \le a \le 2{,}45$; lo zero finale adesso «significa» qualcosa e va mantenuto nella notazione.

Esercizio 13

Approssimare a tre cifre i seguenti valori: 4,2378; 567,28; 345,556; 23,45; 3,4967.

■ Quando il valore considerato è il risultato di una misura valgono gli stessi principi: l'ultima cifra è determinata dall'approssimazione della misura. Misurando ad es. una lunghezza con il metro da sarto (che non riporta i millimetri vista la sua elasticità) si potrebbe avere l =124 cm; eseguendo la stessa misura con il metro da falegname si potrebbe invece avere $l' = 124{,}0$ cm, che esprime quanto segue: è stato misurato il numero di millimetri dopo 124 cm, e il risultato ottenuto è 0.

■ Ci si potrebbe ora chiedere quante cifre significative sia opportuno mantenere nell'approssimare il risultato di un calcolo; la risposta dipende dalla precisione dei dati e dagli scopi. Per i nostri fini possiamo dire che approssimare a tre cifre rappresenta una ragionevole scelta. Attenzione però: l'approssimazione va eseguita solo sui risultati finali; approssimando eccessivamente i risultati dei passaggi intermedi la validità delle ultime cifre dei risultati finali non è più assicurata. Se si desidera ad es. che il risultato finale sia approssimato a tre cifre significative, è necessario mantenere nei passaggi intermedi almeno cinque cifre significative.

6.2 Notazione esponenziale

■ La *notazione esponenziale* (exponential notation) consiste nell'esprimere un valore come prodotto di un numero, avente la prima cifra significativa al posto delle unità, per una potenza di dieci. Per esprimere un numero in notazione esponenziale è sufficiente spostare la virgola fino a che la prima cifra significativa non raggiunge le unità; se sono stati fatti n passi a sinistra, equivalenti a una divisione del numero per 10^n, si moltiplicherà per 10^n, se sono stati fatti n passi a destra, equivalenti a una divisione del numero per 10^{-n}, si moltiplicherà per 10^{-n}. Per passare dalla notazione esponenziale a quella decimale si esegue l'operazione inversa: n passi a destra se l'esponente è positivo, n passi a sinistra se è negativo.

Esercizio 14

Esprimere in notazione esponenziale i seguenti valori: 12300; 1000000; 0,000045; 3250,458.

Esercizio 15

Esprimere in notazione decimale i seguenti valori: $2{,}37 \cdot 10^5$; $4{,}567 \cdot 10^{-9}$; $8{,}3456 \cdot 10^3$; $7{,}23 \cdot 10^{-1}$.

■ La notazione esponenziale, indicata nelle calcolatrici come *notazione scientifica* (scientific notation), permette di esprimere quantità molto grandi o molto piccole senza dover conteggiare gli zeri. Risolve inoltre il problema delle cifre significative di valori interi con uno o più zeri finali (scrivendo 230000 non si sa quanti zeri siano significativi, scrivendo $2{,}30 \cdot 10^5$ non ci sono ambiguità).

■ Nelle scienze tecniche risulta più pratico un altro tipo di notazione, indicata come *ingegneristica* (engineering) nelle calcolatrici, in cui il modulo dell'esponente di dieci può essere pari solo a multipli di tre, in modo da esprimere multipli o sottomultipli delle unità di misura utilizzate (tab. 3). I metodi di conversione sono gli stessi della notazione scientifica.

Tab. 3 Multipli e sottomultipli delle unità di misura.

fattore moltiplicativo	prefisso	simbolo	fattore moltiplicativo	prefisso	simbolo
10^{12}	tera	T	10^{-3}	milli	m
10^9	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^6	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^3	kilo	k	10^{-12}	pico	p

Esercizio 16

Esprimere i seguenti valori in notazione ingegneristica e poi mediante multipli o sottomultipli delle unità di misura: 220000 m; 0,000054 g; 4000000 Hz; 0,00000000018 s.

6.3 Ordine di grandezza

■ L'*ordine di grandezza* (order of magnitude) di una variabile o di un parametro è quella potenza intera di 10 che più si avvicina ai suoi possibili valori. Ad es. diremo che l'ordine di grandezza dell'altezza h di un edificio è di 10 m (scriveremo $h \approx 10$ m); nei casi pratici tale parametro potrà essere pari a 20 m, o 8 m, o altro. L'ordine di grandezza è quindi una quantità che serve ad avere un'idea grossolana dei valori che una certa grandezza può assumere.

Esercizio 18

Sulla base dell'esperienza comune, elencare gli ordini di grandezza delle seguenti quantità: peso di una persona, altezza di un tavolo, durata di un'interrogazione.

6.4 Quantità trascurabili

■ Spesso nelle scienze fisiche è possibile semplificare le espressioni matematiche o i modelli fisici dicendo che una certa quantità «risulta trascurabile». È opportuno far notare che un valore può diventare trascurabile solo in confronto a una quantità a esso omogenea (misurabile con la stessa unità di misura), rispetto alla quale deve essere inferiore di almeno due ordini di grandezza.

6.5 Frazioni

■ La maggior parte degli errori che si commettono maneggiando frazioni complesse deriva dal non interpretare correttamente l'ordine in cui vanno eseguite le diverse operazioni di divisione. Se consideriamo l'operazione di addizione, la validità della proprietà associativa, per cui $(a + b) + c = a + (b + c)$, consente di effettuare le operazioni di somma nell'ordine desiderato, e quindi viene meno l'esigenza di indicare, ad es. con parentesi, un ordine di esecuzione delle operazioni. Dato che, come è facile verificare, per l'operazione di divisione tale proprietà non è verificata, è necessario specificare sempre, con parentesi o mediante i simboli di frazione, l'ordine delle operazioni che deve essere rispettato per ottenere il risultato corretto. Seguono alcuni esempi, per la comprensione dei quali si ricorda che $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Esempio 2

Si consideri la seguente espressione:

$$A = \frac{a}{\frac{b}{c}} \tag{2.33}$$

Il segno più ampio della linea di frazione superiore sta a indicare che la quantità a risulta divisa per la frazione $\frac{b}{c}$. Se si devono eseguire calcoli numerici si procederà a calcolare $k = \frac{b}{c}$ e quindi $A = \frac{a}{k}$. Se si vuole esprimere in forma semplificata la 2.32, la si può rappresentare come prodotto tra a e $\left(\frac{b}{c}\right)^{-1}$, ottenendo

$$A = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b} \tag{2.34}$$

Esempio 3

Si consideri la seguente espressione:

$$A = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d} \cdot e} \tag{2.35}$$

Il segno più ampio della linea di frazione centrale sta a indicare che la quantità $\frac{a}{b}$ risulta divisa per la quantità $\frac{c}{d} \cdot e$. Se si devono eseguire calcoli numerici si procederà a calcolare $k = \frac{a}{b}$, $l = \frac{c}{d} \cdot e$ e quindi $A = \frac{k}{l}$. Se si vuole esprimere in forma semplificata la 2.34, la si può rappresentare come prodotto tra $\frac{a}{b}$ e $\left(\frac{c}{d} \cdot e\right)^{-1}$, ottenendo

$$A = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{ce}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{ce} = \frac{ad}{bce} \tag{2.36}$$

Esercizio 18

Semplificare in un'unica frazione le seguenti espressioni:

1) $\dfrac{\frac{V_1^2}{Z}}{\frac{V_2^2}{Z}}$; 2) $\dfrac{\left(\frac{E_{\text{eff}}}{2}\right)^2}{R_g}$; 3) $\dfrac{8\frac{a}{b} \cdot c}{\left(2\frac{d}{e}\right)^2 \cdot \frac{f}{g}}$

■ A conclusione del capitolo, si riporta per comodità del lettore l'alfabeto greco.

minuscola	maiuscola	nome	minuscola	maiuscola	nome	minuscola	maiuscola	nome
α	Α	alfa	ι	Ι	iota	ρ	Ρ	rho
β	Β	beta	κ	Κ	kappa	σ	Σ	sigma
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	τ	Τ	tau
δ	Δ	delta	μ	Μ	mi	υ	Υ	upsilon
ε	Ε	epsilon	ν	Ν	ni	φ	Φ	phi
ζ	Ζ	zeta	ξ	Ξ	xi	χ	Χ	chi
η	Η	eta	ο	Ο	omicron	ψ	Ψ	psi
θ	Θ	theta	π	Π	pi	ω	Ω	omega

Function (mathematics)

In mathematics, a function is a relation between a set of inputs and a set of potential outputs with the property that each input is related to exactly one output. An example of such a relation is defined by the rule $f(x) = x^2$, which relates an input x to its square, which are both real numbers. The output of the function f corresponding to an input x is denoted by $f(x)$ (read "f of x"). If the input is –3, then the output is 9, and we may write $f(-3) = 9$.

Exponential function

In mathematics, the exponential function is the function e^x, where e is the number (approximately 2.718281828) such that the function e^x is its own derivative. The exponential function is used to model a relationship in which a constant change in the independent variable gives the same proportional change (i.e. percentage increase or decrease) in the dependent variable. The function is often written as $\exp(x)$, especially when it is impractical to write the independent variable as a superscript.

Logarithm

The logarithm of a number is the exponent by which another fixed value, the base, has to be raised to produce that number. For example, the logarithm of 1000 to base 10 is 3, because 1000 is 10 to the power 3: $1000 = 10^3 = 10 \times 10 \times 10$. More generally, if $x = b^y$, then y is the logarithm of x to base b, and is written $y = \log_b(x)$, so $\log_{10}(1000) = 3$.

The logarithm to base $b = 10$ is called the common logarithm and has many applications in science and engineering. The natural logarithm has the constant e (≈ 2.718) as its base; its use is widespread in pure mathematics, especially calculus. The binary logarithm uses base $b = 2$ and is prominent in computer science.

Trigonometric functions

In mathematics, the trigonometric functions (also called circular functions) are functions of an angle. They are used to relate the angles of a triangle to the lengths of the sides of a triangle. Trigonometric functions are important in the study of triangles and modeling periodic phenomena, among many other applications.

The most familiar trigonometric functions are the sine, cosine, and tangent. In the context of the standard unit circle with radius 1, where a triangle is formed by a ray originating at the origin and making some angle with the x-axis, the sine of the angle gives the length of the y-component (rise) of the triangle, the cosine gives the length of the x-component (run), and the tangent function gives the slope (y-component divided by the x-component).

Complex number

A complex number is a number which can be put in the form $a + bi$, where a and b are real numbers and i is called the imaginary unit, where $i^2 = -1$. In this expression, a is called the real part and b the imaginary part of the complex number.